Univerzitet u Zenici
Filozofski fakultet
Odsjek: Matematika i informatika
Zenica, 11.07.2014.

Diferencijalna geometrija, pismeni ispit

Važno: Obavezno napisati formulu koju koristite i značenja simbola iz napisane formule, u sva četri zadatka. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. (40%) (a) Data je kriva $\vec{r} = \vec{r}(t)$ kod koje su $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}\,'(t)$ kolinearni u intervalu mijenjanja parametra (tj. $\vec{r}\,'(t) = \varphi(t)\vec{r}(t)$). Pokazati da je data kriva $\vec{r}$ konstantnog pravca.

(60%) (b) Odrediti vektor tangente krive

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1, \qquad y^2 - 2x + z = 0$$

u tački $M(1;1;1)$ bez konkretnog svođenja krive na parametarski oblik (za parametar uzeti apscisu x).

2. Naći jednačinu normalne ravni u proizvoljnoj tački krive

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, \qquad x^2 - y^2 - z^2 = 1.$$

3. Naći jednačinu cilindrične površi čije su generatrise paralelne pravoj $x = y = z$ i tangiraju elipsoid $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$.

4. Odrediti asimptotske linije površi $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

(#) Data je kriva $\vec{r}=\vec{r}(t)$ kod koje su $\vec{r}(t)$ i $\vec{r}'(t)$ kolinearni u intervalu mijenjanja parametra (tj. $\vec{r}'(t)=\varphi(t)\vec{r}(t)$). Pokazati da je data kriva $\vec{r}$ konstantnog pravca.

Rj:
$$\vec{r}'(t)=\varphi(t)\vec{r}(t)$$

$$x'(t)\vec{i}+y'(t)\vec{j}+z'(t)\vec{k}=\varphi(t)(x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k})$$

Odavde

$$\frac{dx}{dt}=x\varphi(t),\quad \frac{dy}{dt}=y\varphi(t),\quad \frac{dz}{dt}=z\varphi(t)$$

$$\frac{dx}{x}=\varphi(t)dt,\quad \frac{dy}{y}=\varphi(t)dt,\quad \frac{dz}{z}=\varphi(t)dt$$

$$\ln\frac{x}{c_1}=\int\varphi(t)dt,\quad \ln\frac{y}{c_2}=\int\varphi(t)dt,\quad \ln\frac{z}{c_3}=\int\varphi(t)dt$$

$$x=c_1e^{\int\varphi(t)dt},\quad y=c_2e^{\int\varphi(t)dt},\quad z=c_3e^{\int\varphi(t)dt}$$

Dakle

$$\vec{r}=\underbrace{(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})}_{\vec{c}}e^{\int\varphi(t)dt}=\vec{c}\,\underbrace{e^{\int\varphi(t)dt}}_{\gamma(t)}=\gamma(t)\vec{c}$$

($\vec{c}$ - konstantan vektor)

Odrediti vektor tangente krive

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1, \quad y^2 - 2x + z = 0$$

u tački $M(1,1,1)$ bez konkretnog svođenja krive na parametarski oblik (za parametar uzeti apscisu x).

Rj.

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1$$
$$y^2 - 2x + z = 0$$

Ako u ovoj krivoj za parametar uzmemo apscisu x, kriva će imati vektorsku jednačinu

$$\vec{r} = x\vec{i} + y(x)\vec{j} + z(x)\vec{k}.$$

Komponente y i z su ovdje funkcije od x, koje ćemo kao i njene derivacije, naći iz zadane krive na sljedeći način

$$x = x, \quad \dot{x} = 1, \quad \ddot{x} = 0, \quad \dddot{x} = 0$$

$\dot{\vec{r}}$:

$$2x - 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0 \quad /:2$$
$$2y\dot{y} - 2 + \dot{z} = 0.$$

U tački $M(1,1,1)$ ovaj sistem jednačina glasi

$$1 - \dot{y} + \dot{z} = 0 \quad \ldots(I)$$
$$2\dot{y} - 2 + \dot{z} = 0 \quad \ldots(II)$$

$(I)-(II)$: $\quad -3\dot{y} + 3 = 0 \Rightarrow \dot{y} = 1$

$(I)\cdot 2 + II \quad 3\dot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = 0$

Traženi vektor tangente je $\vec{t} = (1;1;0)$.

(#) Naći jednačinu normalne ravni u proizvoljnoj tački krive

$$x^2+y^2-z^2=1, \quad x^2-y^2-z^2=1.$$

Rj.

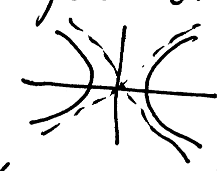
Data je kriva $\vec{r}: \begin{cases} x^2+y^2-z^2=1 \\ x^2-y^2-z^2=1. \end{cases}$

Ako se na neki način riješim y-na dobiću ortogonalnu projekciju krive na xOz ravan.

$$\begin{array}{r} x^2+y^2-z^2=1 \\ +\ \ x^2-y^2-z^2=1 \\ \hline 2x^2-2z^2=2 \ /:2 \end{array}$$

$x^2-z^2=1$

ortogonalna projekcija date krive na xOz ravan.
Parametrizirajmo ovu krivu.
Prepoznajemo da je ovo jednačina hiperbole u xOz ravni



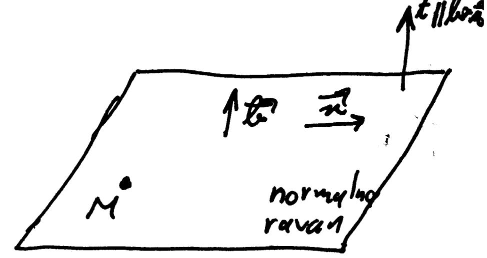
Parametarski oblik jedinične hiperbole je $ch^2t-sh^2t=1$,

tj. $x=ch\,t$
$z=sh\,t$ (od ranije znamo $ch^2t-sh^2t=1$)

$$\Rightarrow \quad y=z^2-x^2+1=-(x^2-z^2-1)=-(ch^2t-sh^2t-1)=0$$

Parametarski oblik date krive je

$$\vec{r}: \begin{cases} x=ch\,t \\ y=0 \\ z=sh\,t \\ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$



Normalnu ravan određuju tačka M na krivoj, vektori $\vec{b}$ i $\vec{n}$.

$$\vec{r} = (\operatorname{ch} t, 0, \operatorname{sh} t)$$

$$\dot{\vec{r}} = (\operatorname{sh} t, 0, \operatorname{ch} t)$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\operatorname{ch} t, 0, \operatorname{sh} t)$$

$$\vec{b} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \\ \operatorname{ch} t & 0 & \operatorname{sh} t \end{vmatrix} = (0, \operatorname{sh}^2 t - \operatorname{ch}^2 t, 0)$$

$$= (0, -1, 0)$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ \operatorname{sh} t & 0 & \operatorname{ch} t \end{vmatrix} = (-\operatorname{ch} t, 0, \operatorname{sh} t)$$

$$\vec{t} = (\operatorname{sh} t, 0, \operatorname{ch} t)$$

Proizvoljna tačka na krivoj je $M(\operatorname{ch} t, 0, \operatorname{sh} t)$

$$\dot{x}(x - x_1) + \dot{y}(y - y_1) + \dot{z}(z - z_1) = 0$$

jednač. norm. ravni u tački (x_1, y_1, z_1)

$$\operatorname{sh} t (x - \operatorname{ch} t) + 0(y - 0) + \operatorname{ch} t (z - \operatorname{sh} t) = 0$$

$$\operatorname{sh} t \, x + \operatorname{ch} t \, z - 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 0$$

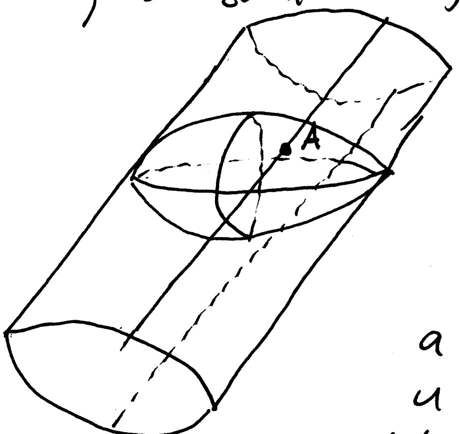
jednačina tražene normalne ravni

ako gornju jednačinu podijelimo sa $\operatorname{sh} t$ dobijemo

$$x + \operatorname{ctgh} z - 2 \operatorname{ch} t = 0$$

(#) Naći jednačinu cilindrične površi čije su generatrise paralelne pravoj $x=y=z$ i tangiraju elipsoid
$x^2+4y^2+9z^2=1$.

Rj. Pokušajmo zamisliti izgled tražene cilindrične površi.



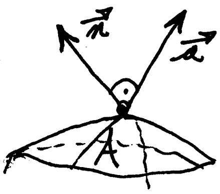
Ako je tačka $A(x_1,y_1,z_1)$ istovremeno na elipsi i na cilindru onda je sa jedne strane

$$x_1^2+4y_1^2+9z_1^2=1 \quad \dots (1)$$

a sa druge strane je vektor $\vec{a}=(1,1,1)$ u tangentnoj ravni elipsoida u tački A (vektor $\vec{a}$ je paralelan sa vektorom pravca date prave $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$).

Vektor normale tangentne ravni je $\vec{n}=(x_1, 4y_1, 9z_1)$

$\left(F(x,y,z)=x^2+4y^2+9z^2-1,\ \frac{\partial F}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=8y,\ \frac{\partial F}{\partial z}=18z \right)$



Iz uslova normalnosti $\vec{a}$ i $\vec{n}$ izlazi da je

$$x_1+4y_1+9z_1=0. \quad \dots (2)$$

Jednačina generatrise kroz tačku A je

$$\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{1}=\frac{z-z_1}{1} \quad (=t) \quad \text{tj.}$$

$$\begin{aligned} x_1&=x-t \\ y_1&=y-t \\ z_1&=z-t \end{aligned} \quad \dots (3)$$

gdje je $B(x,y,z)$ tačka na cilindru.

Eliminišući x_1, y_1, z_1 i t iz (1), (2) i (3) dobijamo jednačinu cilindrične površi.

Ako (3) uvrstimo u (2) dobićemo t izraženo preko x, y i z:

$$(x-t)+4(y-t)+9(z-t)=0$$
$$-14t+x+4y+9z=0 \quad \Rightarrow \quad t=\frac{1}{14}(x+4y+9z).$$

Ako ovako dobijeno t vratimo u (3) dobićemo

$$x_1 = \frac{1}{14}(13x - 4y - 9z)$$

$$y_1 = \frac{1}{14}(-x + 10y - 9z)$$

$$z_1 = \frac{1}{14}(-x - 4y + 5z)$$

Novodobijene vrijednosti uvrstimo u (1):

$$(13x - 4y - 9z)^2 + 4(-x + 10y - 9z)^2 + 9(-x - 4y + 5z)^2 = 14^2$$

$$13^2x^2 + 16y^2 + 81z^2 - 2\cdot 13\cdot 4xy - 2\cdot 13\cdot 9xz + 2\cdot 4\cdot 9yz$$

$$+4(x^2 + 100y^2 + 81z^2 - 20xy + 180xz - 18yz)$$

$$+9(x^2 + 16y^2 + 25z^2 + 8xy - 10xz - 40yz) = 14^2$$

$$182x^2 + 560y^2 + 630z^2 - 112xy - 252xz - 1008yz = 14^2 \quad /:14$$

$$13x^2 + 40y^2 + 45z^2 - 8xy - 18xz - 72yz - 14 = 0.$$

tražena jednačina cilindrične površi

(#) Odrediti asimptotske linije površi $z=\frac{1}{x^2+y^2}$.

Rj.

Prvo parametrizirajmo datu krivu

$$\left.\begin{aligned} x&=\sqrt{u}\cos v\\ y&=\sqrt{u}\sin v\end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=u\cos^2 v+u\sin^2 v=u$$

$$\Downarrow$$

$$z=\frac{1}{u}$$

$$\vec{r}:\begin{cases} x=\sqrt{u}\cos v\\ y=\sqrt{u}\sin v\\ z=\frac{1}{u}\\ u\in\mathbb{R}_0^+,\ v\in[0,2\pi)\end{cases}$$

Asimptotske linije površi $\vec{r}$ dobijemo kada rješenje diferencijalne jednačine $F_2=0$ uvrstimo u jednačinu površi $\vec{r}$ (F_2 je druga osnovna forma površi)

$$F_2=d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0$$

$$d^2\vec{r}=\vec{r}\,''_{uu}\,du^2+2\vec{r}\,''_{uv}\,du\,dv+\vec{r}\,''_{vv}\,dv$$

$$\vec{r}\,'_u=\left(\frac{\cos v}{2\sqrt{u}},\ \frac{\sin v}{2\sqrt{u}},\ -\frac{1}{u^2}\right)$$

$$\vec{r}\,'_v=(-\sqrt{u}\sin v,\ \sqrt{u}\cos v,\ 0)$$

$$\vec{n}=\vec{r}\,'_u\times\vec{r}\,'_v=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \frac{\cos v}{2\sqrt{u}}&\frac{\sin v}{2\sqrt{u}}&-\frac{1}{u^2}\\ -\sqrt{u}\sin v&\sqrt{u}\cos v&0\end{vmatrix}=\left(\frac{\sqrt{u}\cos v}{u^2},\ \frac{\sqrt{u}\sin v}{u^2},\ \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{r}\,''_{uu}=\left(-\frac{\cos v}{4\sqrt{u^3}},\ -\frac{\sin v}{4\sqrt{u^3}},\ \frac{2}{u^3}\right)\quad /du^2$$

$$\vec{r}\,''_{uv}=\left(-\frac{\sin v}{2\sqrt{u}},\ \frac{\cos v}{2\sqrt{u}},\ 0\right)\quad /du\,dv$$

$$\vec{r}\,''_{vv}=(-\sqrt{u}\cos v,\ -\sqrt{u}\sin v,\ 0)\quad /dv^2$$

Sad imamo

$$d^2\vec{r} = \Big(-\frac{\cos v}{\underbrace{4\sqrt{u^3}}_{4u\sqrt{u}}}du^2 - \frac{\sin v}{2\sqrt{u}}du\,dv - \sqrt{u}\cos v\,dv^2,$$

$$-\frac{\sin v}{4\sqrt{u^3}}du^2 + \frac{\cos v}{2\sqrt{u}}du\,dv - \sqrt{u}\sin v\,dv^2,$$

$$\frac{2}{u^3}du^2\Big)$$

$$\vec{n} = \left(\frac{\sqrt{u}\cos v}{u^2}, \frac{\sqrt{u}\sin v}{u^2}, \frac{1}{2}\right)$$

Jednačinu asimptotske linije možemo pisati u obliku

$$F_2 = 0 \Rightarrow d^2\vec{r}\cdot\vec{n}_0 = 0 \Rightarrow d^2\vec{r}\cdot\vec{n} = 0$$

što za ovu jednačinu postaje

$$\left(-\frac{1}{4u^3}\cos^2 v - \frac{1}{4u^3}\sin^2 v + \frac{1}{u^3}\right)du^2 + \left(\frac{-1}{2u^2}\sin v\cos u + \frac{1}{2u^2}\sin v\cos u\right)du\,dv$$

$$+\left(-\frac{1}{u}\cos^2 v - \frac{1}{u}\sin^2 v\right)dv^2 = 0$$

$$\frac{3}{4u^3}du^2 - \frac{1}{u}dv^2 = 0 \quad /\cdot u$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{du^2}{u^2} = dv^2 \quad /\sqrt{\ }$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{du}{u} = \pm dv \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\ln u = \pm v + c_1$$

$$\ln u = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}v + c_1$$

$$u = e^{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}v + c_1} \Rightarrow u = ce^{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}v}$$

Asimptotske linije površi su

$$\vec{r}_{1,2} = \left(\sqrt{ce^{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}v}}\cos v, \sqrt{ce^{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}v}}\sin v, z = \frac{1}{ce^{\pm\frac{2}{\sqrt{3}}v}}\right).$$